INSTITUTO TECNOLOGICO SUPERIOR DE
PUERTO PEÑASCO

CURSO PROPEDEUTICO
PARA INGENIERIA 2010

MATEMATICAS

ACADEMIA DE INGENIERIA

ELABORADO POR:

M.C. EVERARDO FLORES ORTIZ
ING. EMMA YADIRA TEJEDA CORRALES
ING. JAVIER ORTIZ VIDACA

FILOSOFÍA.

Este escrito refleja nuestra filosofía acerca de que un texto de matemática a cualquier nivel debe ser legible, directo y cargado de motivación. Pero, al final, la forma de aprender matemática es haciendo matemática. En consecuencia, hemos enfatizado la solución del problema como medio de comprensión. Los ejemplos están diseñados para instruir y guiar a los estudiantes, los ejercicios, entonces proporcionan a los jovenes la oportunidad de probar su comprensión, de retar su entendimiento y de aplicar su conocimiento a situaciones de mundo real.

AUDIENCIA Y FLEXIBILIDAD.

Intentamos que este texto proporcione un tratamiento de álgebra, trigonometría, pre-cálculo y cálculo diferencial e integral. Pensando además en que sea accesible a un estudiante universitario que ha cursado tres años en preparatoria. Hemos proporcionado aqui un material suficiente para un primer semestre normal. Tal riqueza de temas permite al profesor seleccionar lo que más se ajuste a los objetivos del curso y a los antecedentes y habilidades de los estudiantes. También puede ser un curso introductorio a las matemáticas de universidad para los estudiantes de humanidades o de negocios que no planean un estudio mayor en esta rama.

CARACTERÍSTICAS.

Hemos comprobado que los ejemplos y ejercicios son las principales fuentes de aprendizaje en un texto de matemáticas, además se ha descubierto que el estudiante confia en los ejemplos, no en teoremas ni en pruebas. En consecuecia, se incluyó un gran número de ejemplos para ilustrar tanto los conceptos teóricos como prácticos.

atentamente:

Ing. Javier Ortiz Vidaca
Ing. Emma Yadira Tejeda Corrales.
M. C Everardo Flores Ortiz.

1 Módulo 1. Algebra

1.1 Exponentes enteros

Sabemos que es más conveniente escribir una suma repetida $x+x+x+x$ de forma $4x$. De igual forma, podemos escribir el producto repetido $x \cdot x \cdot x$ de manera efectiva, utilizando exponentes.

$$x \cdot x \cdot x = x^3$$

En general para cualquier número real x y para cualquier entero positivo n, el simbolo x^n significa:

$$x^n \equiv \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n- \text{ veces}}$$

También para cualquier entero positivo n, definimos

$$x^{-n} \equiv \frac{1}{x^n} \qquad x \quad \neq 0$$

entonces, como ejemplos de esto, se tiene:

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$\left(-\frac{1}{10}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{10}\right)^4} = \frac{1}{\frac{1}{10,000}} = 10,000$$

Finalmente, para cualquier base x diferente de cero, se define $x^0 \equiv 1$; es decir, la expresión 0^0 carece de sentido aritmético.

Ejemplos:

- $5x^3 = 5 \cdot x \cdot x \cdot x$
- $(5x)^3 = 5x \cdot 5x \cdot 5x = 125x^3$
- $-3^4 = -(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = -81$
- $(-3)^4 = (-3)(-3)(-3)(-3)$

El lector debe dirigirse al apartado de ejercicios correspondientes a esta sección, la cual se encuentra al final del escrito, y tratar de resolver cada uno de ellos.

1.2 Leyes de los exponentes

En general, si x es cualquier número real y m, n son enteros positivos, entonces:

$$x^m x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{m\text{-factores}} \cdot \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n\,-\,\text{factores}} = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{m+n\text{ -factores}} = x^{m+n}$$

Leyes de los exponentes:

1) $x^m x^n = x^{m+n}$

2) $(x^m)^n = x^{mn}$

3) $(xy)^n = x^n y^n$

4) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n} \qquad y \neq 0$

5) $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n} \qquad x \neq 0$

Ejemplos:

a) $a^5 a^4 = a^{5+4} = a^9$

b) $(b^3)^{-2} = b^{3(-2)} = b^{-6} = \dfrac{1}{b^6}$

c) $(3x)^4 = 3^4 x^4 = 81x^4$

d) $(\dfrac{y}{4})^{-5} = \dfrac{y^{-5}}{4^{-5}} = \dfrac{\frac{1}{y^5}}{\frac{1}{4^5}} = \dfrac{4^5}{y^5} = \dfrac{1024}{y^5}$

e) $\dfrac{a^{-5}}{a^{-3}} = a^{-5-(-3)} = a^{-2} = \dfrac{1}{a^2}$

f) $\frac{\left(-6xy^2\right)^3}{x^2y^5} = \frac{(-6xy^2)^3}{x^2y^5} = \frac{(-6)^3x^3(y^2)^3}{x^2y^5} = \frac{-216x^3y^6}{x^2y^5} = -216xy$

1.3 Radicales y sus leyes

En general, las raíces de los números reales se definen por el enunciado:

$$\sqrt[n]{x} = r \qquad \text{si y solo si} \qquad r^n = x$$

Al número $\sqrt[n]{x}$ se le denomina la raíz n-ésima principal de x. Además:

$$\boxed{\text{índice del radicando} \rightarrow \sqrt[n]{x} \leftarrow \text{radicando}}$$

Es importante conocer la forma en la cual se debe de operar con radicales, a continuación enunciaremos unas cuantas de sus reglas. Sean m y n enteros positivos y x, y números reales, entonces:

1) $(\sqrt[n]{x})^n = x$

2) $\sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$

3) $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$

4) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$

Ejemplos:

a) $\sqrt[3]{27y^6} = \sqrt[3]{27}\,\sqrt[3]{y^6} = \sqrt[3]{27}\,\sqrt[3]{(y^2)^3} = 3y^2$

b) $\sqrt{\frac{x^2}{25}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{25}} = \frac{x}{5}$

c) $\sqrt[3]{\sqrt[7]{x^{21}}} = \sqrt[21]{x^{21}} = x$

d) $\sqrt[3]{81a^3b^5c^6} = \sqrt[3]{(27a^3b^3c^6)3b^2} = \sqrt{(3abc^2)^3 3b^2} = \sqrt[3]{(3abc^2)^3}\,\sqrt[3]{3b^2}$

$= 3abc^2\,\sqrt[3]{3b^2}$

e) $\left(\sqrt[5]{r}\,\sqrt[5]{s}\right)^5 = (\sqrt[5]{rs})^5 = rs$

f) $\sqrt[3]{2x^2y^3}\,\sqrt[3]{4xz^3} = \sqrt[3]{(2xyz)^3} = 2xyz$

g) $\frac{\sqrt[4]{32a^{10}b^{16}}}{\sqrt[4]{2a^2}} = \sqrt[4]{16a^8b^{16}} = \sqrt[4]{(16a^8b^{16}} = \sqrt[4]{(2a^2b^4)^4} = 2a^2b^4$

h) $$\begin{aligned} \sqrt{10} - \sqrt{40x^4} + \sqrt{90x^4y^8} &= \sqrt{10} - 2x^2\sqrt{10} + 3x^2y^4\sqrt{10} \\ &= \sqrt{10}\left(1 - 2x^2 + 3x^2y^4\right) \end{aligned}$$

j) $\sqrt[3]{8x^4} + \sqrt[3]{x^4y^3} = 2x^3\sqrt{x} + xy^3\sqrt{x} = x\sqrt[3]{x}(2+y)$

□

1.4 Racionalizacion de radicales

Cuando quitamos los radicales del numerador o del denominador de un fracción, decimos que estamos racionalizando. En álgebra, normalmente se racionaliza el denominador pero, en cálculo, a veces es importante racionalizar el numerador. El procedimiento de racionalizacion implica la multiplicaciòn de la fracción por un 1 muy especial.

a) $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

c) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{(\sqrt[3]{2})^2}{(\sqrt[3]{2})^2} = \frac{(\sqrt[3]{2})^2}{(\sqrt[3]{2})^3} = \frac{(\sqrt[3]{2})^2}{2} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$

Si tenemos una fracción que contenga expresiones como $\sqrt{x}$ y $\sqrt{y}$,usamos el hecho de que el producto de $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ y su conjugado $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ no contienen radicales. Es decir:

$$\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right) = x - y$$

Ejemplo: Racionalice la siguiente expresión:

$$\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \left(\frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}\right) = \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} =$$

$$= \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

□

1.5 Exponentes racionales

El concepto de la raiz n-ésima de un número nos capacita para ampliar la definición de x^n de exponentes enteros a exponentes racionales, y como veremos, con frecuencia es más fácil trabajar con exponentes racionales que con radicales.

$$x^{\frac{1}{n}} \equiv \sqrt[n]{x} \quad , \quad x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$$

Ejemplos:

a) $(25)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$

b) $(64)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64} = 4$

c) $\left(3x^{\frac{1}{2}}\right)\left(2x^{\frac{1}{5}}\right) = 6x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}} = 6x^{\frac{5+2}{10}} = 6x^{\frac{7}{10}}$

d) $(a^2b^{-8})^{\frac{1}{4}} = \left(a^2\right)^{\frac{1}{4}}(b^{-8})^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{2}}b^{-2} = \dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{+2}} = \dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{b^2}$

e) $\dfrac{x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{2}}} = x^{\frac{2}{3}-\frac{1}{4}}y$

2 Módulo 2: Trigonometría

2.1 Conceptos

Hace más de 4,500 años los habitantes de Babilonia manejaban ciertas relaciones con triangulos y áreas. Entre las más interesantes estaba la conocida hoy como "Teorema de Pitágoras". Tuvieron que pasar cerca de 2500 años para que los griegos comenzaran a preguntarse acerca de métodos precisos para medir ángulos y lados de triángulos. Con esto surge una rama de la matemática conocida como *Trigonometría.* La raíz etimológica de esta palabra es *trigonon* que significa triángulo y *metria* que es medición. En la actualidad es sumamente importante y aplicable el concepto de trigonometría, podemos mencionar el posicionamiento global mediante sátelite o mejor conocido como GPS, por citar un ejemplo.

A este nivel, el alumno debe recordar como se miden ángulos en el plano. Por ejemplo, el ángulo tiene sentido positivo si el movimiento es en contra de las manecillas del reloj, y negativo en caso contrario. Además debe recordar

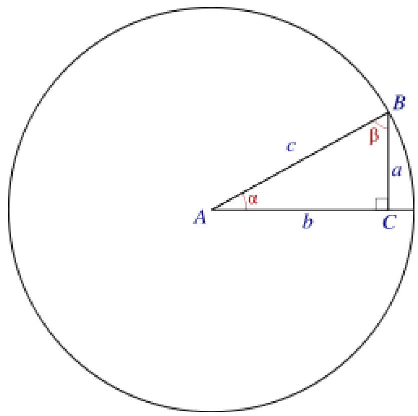


Figure 1: **Triángulo Rectángulo**

también las unidades en las cuales los ángulos son medidos, que en escencia son: grados y radianes.

Un grado (1°) se define como $\dfrac{1}{360}$ de una revolución completa en sentido contrario al del reloj. Mientras que un radian ($1\ rad$) tiene siguiente equivalencia:

$$\boxed{1\ rad \equiv \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57.2958^\circ}$$

El objetivo a partir de este momento será explicar un poco las relaciones que aparecen en triángulos rectángulos.

2.2 Funciones trigonométricas de ángulos agudos

Trabajaremos con las seis funciones generadas por un triángulo rectángulo. A continuación las presentamos en base a la figura 1, que aparece en la parte superior de la hoja:

Nombres	**Definición**	**Símbolo**
Seno	$\dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$	$\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$
Coseno	$\dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$	$\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$
Tangente	$\dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$	$\tan\alpha = \dfrac{a}{b}$
Cotangente	$\dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$	$\cot\alpha = \dfrac{b}{a}$
Secante	$\dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$	$\sec\alpha = \dfrac{c}{b}$
Cosecante	$\dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$	$\csc\alpha = \dfrac{c}{a}$

Es claro que para el ángulo β las definiciones anteriores también aplican. Hagamos algunos ejemplos para ilustrar el manejo de estas relaciones.

Ejemplo: Supongamos que un triángulo rectángulo tiene las siguientes dimensiones: $a = 3, b = 4$. Encuentre todas las funciones trigonométricas asociadas para α.

Solución: Utilizando el teorema de Pitágoras se tiene:

$$c = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

Con el valor de la hipotenusa encontrado, llegamos a lo siguiente:

$$\sin\alpha = \frac{3}{5} \qquad \cos\alpha = \frac{4}{5} \qquad \tan\alpha = \frac{3}{4}$$

$$\cot\alpha = \frac{4}{3} \qquad \sec\alpha = \frac{5}{4} \qquad \csc\alpha = \frac{5}{3}$$

$\square$

Un problema más interesante sería el siguiente: dados los lados de un triángulo rectángulo, encontrar sus ángulos interiores. Este problema está íntimamente relacionado con el ejercicio anterior. La dificultad aparece cuando a partir de cualquiera de las seis relaciones que tenemos, se desea "despejar" al ángulo α (o β). Para realizar esto, debemos entender el concepto de función inversa, lo cual supera el alcance de estas notas introductorias. Daremos una breve explicación del método, pero dejando de lado la rigurosidad matemática necesaria.

Supongamos que se tiene:

$$\sin\alpha = x, \qquad \text{donde } x \text{ es un valor entre } -1 \text{ y } 1.$$

Entonces la forma de recuperar el valor de α, a partir de lo anterior, es calculando:

$$\alpha = \arcsin x = \sin^{-1} x$$

lo cual se lee como "arco seno de x" o "seno inverso de x". Lo interesante aquí, es mencionar que no importa que función trigonométrica se haya seleccionado, bajo el mismo esquema se llega a la solución. Cualquier calculadora científica de bolsillo puede realizar dichas operaciones.

Ejemplo: Para el ejemplo anterior, encontrar el valor de α en grados.

Solución: Recordemos que obtuvimos $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, entonces aplicando el método anterior:

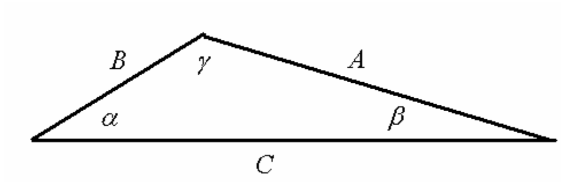
$$\alpha = \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) \approx 36.8698^\circ$$

$\square$

Es claro que para obtener el valor de β no es necesario seguir estos pasos. Para ello echamos mano de la famosa relación

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

donde α, β, γ son los ángulos internos de cualquier triángulo (no necesariamente rectángulo).



2.3 Ley de senos y cosenos.

Basta una simple inspección a la figura con la que iniciamos esta hoja, para observar que el triángulo ya no posee un ángulo de 90°. Es decir, la técnica que desarrollamos en la sección anterior es ineficaz. Pero no debemos preocuparnos, puesto que existe un *simil* para este tipo de problemas. Las técnicas o los métodos se conocen como *ley de los senos* y *ley de los cosenos.*

Supongamos que se tiene un triángulo oblicuángulo (sin ángulo recto) como el de la figura, entonces se cumple:

$$\boxed{\frac{\sin\alpha}{A} = \frac{\sin\beta}{B} = \frac{\sin\gamma}{C}} \qquad \textbf{Ley de los senos}$$

Debemos observar que de esta ley se desprenden tres igualdades a la vez (¿cuáles?), y para poder utilizarla, **es necesario conocer al menos tres de las variables que intervienen**.

Ejemplo: Dado el triángulo ABC, con $\alpha = 48°, \gamma = 57°, B = 47$, calcular las partes restantes.

Solución: Conocemos dos de los tres ángulos, así

$$\beta = 180° - 57° - 47° = 75°$$

De la ley de los senos, trabajaremos con la igualdad

$$\frac{\sin\alpha}{A} = \frac{\sin\beta}{B} \qquad \Longrightarrow A = B\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \qquad \Longrightarrow A \approx 36.15$$

Basta considerar otra igualdad para encontrar el valor de C,

$$\frac{\sin\beta}{B} = \frac{\sin\gamma}{C} \qquad \Longrightarrow C = B\frac{\sin\gamma}{\sin\beta} \qquad \Longrightarrow C \approx 40.8$$

$\square$

Es claro que uno puede jugar con las posibles combinaciones de los datos y así generar problemas diferentes. En la última sección, dedicada a ejercicios, el lector comprenderá mejor esta idea.

Hay casos en los cuales no es posible aplicar la ley de los senos (directamente) a un triángulo oblicuo, para solucionar este inconveniente existe la ley de los cosenos.

$$\boxed{\begin{array}{c} A^2 = B^2 + C^2 - 2BC\cos\alpha \\[1em] B^2 = A^2 + C^2 - 2AC\cos\beta \\[1em] C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\gamma \end{array}} \qquad \textbf{Ley de los cosenos}$$

Ejemplo: Determinar B para un triángulo con $A = 5$, $C = 8$ y $\beta = 77°$.

Solución: Usemos de forma natural la segunda relación de la ley:

$$B^2 = 5^2 + 8^2 - 2\,(5)\,(8)\cos 77° \qquad \Longrightarrow B^2 \approx 71 \qquad \Longrightarrow B \approx 8.4$$

$\square$

Ejemplo: Si un triángulo tiene lados $A = 90$, $B = 70$, y $C = 40$, calcular los ángulos interiores.

Solución: Usando la primera relación de la ley (podría ser cualquiera) y despejando $\cos\alpha$:

$$\cos\alpha = \frac{A^2 - B^2 - C^2}{-2BC} \qquad \Longrightarrow \cos\alpha = -\frac{2}{7} \qquad \Longrightarrow \alpha = \arccos(-\frac{2}{7}) \approx 106.6°$$

$$\cos\beta = \frac{B^2 - A^2 - C^2}{-2AC} \qquad \Longrightarrow \cos\beta = \frac{2}{3} \qquad \Longrightarrow \beta = \arccos(\frac{2}{3}) \approx 48.18°$$

$$\gamma \approx 180° - 106.6° - 48.18° \approx 25.22°$$

$\square$

3 Módulo 3: Pre-cálculo

3.1 El concepto de función.

Hablar del concepto de función involucra a una de las herramientas fundamentales de la matemática actual. La teoría de conjuntos es la parte matemática que le da rigor a la teoría de funciones. Nosotros tomaremos otro camino un tanto diferente.

Entenderemos por *función,* una relación entre dos conjuntos, tal que a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y solo uno del segundo. Como ejemplo podemos dar la relación que existe entre las horas trabajadas por cierta persona y el sueldo que ésta percibe. Es claro que para una cantidad "x" de horas corresponde solo una cantidad "y" de sueldo y no dos o más. El primer conjunto se conoce como **dominio**, mientras que al segundo se le nombra **contradominio**.

El lector debe estar familiarizado con funciones de la forma:

$$f(x) = y$$

donde x representa la variable independiente y y se denomina variable dependiente. Este es el tipo de funciones que trataremos a lo largo del escrito.

3.2 Evaluación de funciones.

Determinar a dónde son enviados cada uno de los elementos del dominio bajo la función f se conoce como *evaluación* de la función. Es claro que para evaluar la función en un punto, éste debe primero formar parte del dominio correspondiente. Hagamos un pequeño ejemplo para ilustrar la idea. Sea la función $f(x) = 2x$, entonces se tiene:

x	$\xrightarrow{f}$	$f(x)$
-1	$\rightarrow$	-2
0	$\rightarrow$	0
1	$\rightarrow$	2
2	$\rightarrow$	4

En la función anterior, cada número es enviado a su doble. Es obvio que el dominio de esta función son todos los numeror reales, denotados por $\mathbb{R}$. No en todos los casos sucede lo anterior. Consideremos la función $f(x) = \sqrt{x}$

x	$\xrightarrow{f}$	$f(x)$
-1	$\rightarrow$	$\nexists$
0	$\rightarrow$	0
1	$\rightarrow$	1
2	$\rightarrow$	$1.4142...$

Como podemos observar, la función $f(x) = \sqrt{x}$ no admite número negativos, ya que éstos no poseen raíz cuadrada (en $\mathbb{R}$). Es un claro ejemplo donde el dominio no es $\mathbb{R}$ sino solo los números mayores o iguales a cero.

Lo que sucede en general al evaluar una función en un punto, es que sustituimos en la función el valor de x por el valor requerido, sin importar que éste no sea númerico. Como ejemplo, consideremos a la función $f(x) = x^2 + 2x - 4$, entonces obtenemos:

x	$\xrightarrow{f}$	$f(x)$
-1	$\rightarrow$	$(-1)^2 + 2(-1) - 4 = -5$
2	$\rightarrow$	$(2)^2 + 2(2) - 4 = 4$
$a - c$	$\rightarrow$	$(a-c)^2 + 2(a-c) - 4$
$x + h$	$\rightarrow$	$(x+h)^2 + 2(x+h) - 4$

A la disposición en forma de tabla de la variable independiente y de su evaluación para una función en específico de le denomina **tabulación**. Como veremos un poco más adelante, la tabulación es una parte fundamental de la graficación de funciones.

El problema de obtener dominios de funciones se puede volver un problema muy complicado para cierto tipo de funciones, como por ejemplo para funciones de tipo racional o radical (divisiones y raíces).

Ejemplo: Evalue las siguientes funciones:

1.- $f(x) = 4x^2 + 5, \qquad f(0),\ f(5),\ f(x+h)$

2.- $f(x) = \dfrac{x+1}{x^3 + 2x}, \qquad f(1),\ f(0),\ f(a)$

3.- $f(x) = \sqrt{x-2}, \qquad f(4),\ f(-2)$

Solución:

1. $f(0) = 4(0)^2+5 = 5 \qquad f(5) = 4(5)^2+5 = 105 \qquad f(x+h) = 4(x+h)^2+5$

2.- $f(1) = \frac{(1)+1}{(1)^3+2(1)} = \dfrac{2}{3} \qquad f(0) = \frac{(0)+1}{(0)^3+2(0)} = \dfrac{1}{0} \nexists \qquad f(a) = \frac{a+1}{a^3+2a}$

3.- $f(4) = \sqrt{(4)-2} = \sqrt{2} \qquad f(-3) = \sqrt{(-2)-2} = \sqrt{-4} \nexists$

Se recomienda al lector, resolver los ejercicios destinados para esta sección antes se proseguir.

3.3 Graficación de funciones.

En esta parte hablaremos acerca de la representación gráfica que tienen expresiones como $f(x) = 3x$, $f(x) = x^4 + x$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$,etc. Como ya lo comentamos, una pieza fundamental en la graficación, la conforman tanto la evaluación de funciones como la tabulación.

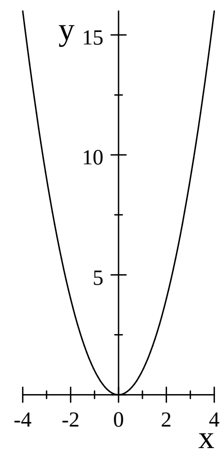
Como sabemos de cursos elementales de geometría, todo elemento en el plano $\mathbb{R}^2$ puede identificarse con un par de coordenadas (x, y), donde x representa la distancia en la recta horizontal del plano cartesiano y la coordenada y representa la distancia vertical. La idea ahora es encontrar los puntos de la forma $(x, f(x))$ para cada uno de los valores de x en el dominio de la función. Para ello debemos evaluar la función y disponer las parejas en forma de tabla, es decir debemos tabular. Al unir todas las parejas resultantes de este proceso, obtendremos lo que se conoce como *gráfica* de la función.

Ejemplo: Construir la gráfica correspondiente a la función $f(x) = x^2$.

Solución: Tabulemos

x	$f(x)$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

Una idea que es importante aclarar, es que no existe un método o una forma en general para asignar los puntos que evaluaremos, es decir, en el ejemplo que estamos tratando consideramos cuatro puntos pero pudiesen ser más si así lo desea el lector. Además de la cantidad de puntos, otro detalle que depende exclusivamente del lector es el referente a que valores considerar, puesto que para esta selección tampoco existe método alguno. Dicho lo anterior, si unimos las parejas encontradas con la tabulación, se tiene:



Gráfica de la función $f(x) = x^2$

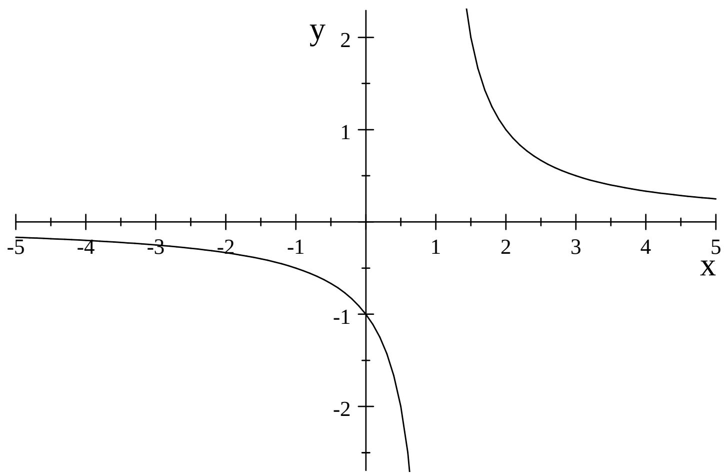
Es importante que antes que se dé un bosquejo de cualquier función, se esté totalmente convencido de la forma de la gráfica de ésta. Para ello se darán tantos puntos como sea necesario.

Ejemplo: Construir la gráfica correspondiente a la función $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$.

Solución: Observemos que $x = 1$ no está en el dominio de la función ¿por qué? por lo tanto debemos evitarlo en la tabulación. Así,

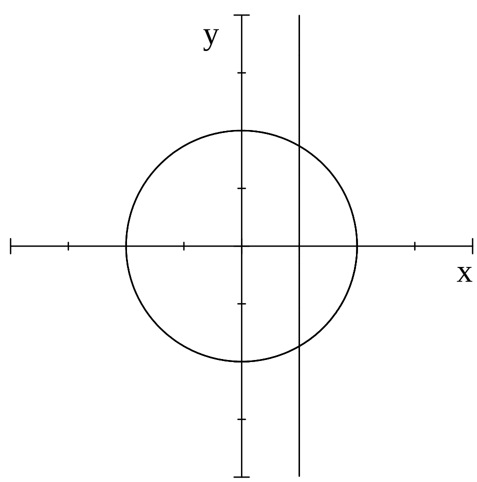
x	$f(x)$
-4	-0.2
-3	-0.25
-1	-0.5
0.5	-2
0.7	-3.33
1.1	10
1.5	2
2	1
3	0.5

uniendo las parejas se tiene:



Gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

El lector debe tener cuidado de no caer en el error de pensar que toda curva en el plano representa a la gráfica de una función. Para ilustrar esto, pensemos en la circunferencia de radio 1 centrada en $(0,0)$:



Una circunferencia no es la gráfica de una función

Esta curva no puede representar a ninguna función; recordemos que la definición es muy clara al decir que a cada elemento del dominio le corresponde *uno* *y solo uno* del contradominio. Así, es claro que cada número entre -1 y 1 esta siendo enviado a dos *alturas* diferentes al mismo tiempo, violando el concepto de función. Una forma sencilla, con la cual uno puede percatarse si una curva representa a una función, es trazando una recta vertical en cualquier punto, si dicha recta interseca en más de una ocasión a la gráfica, entonces no es una función de la variable x.

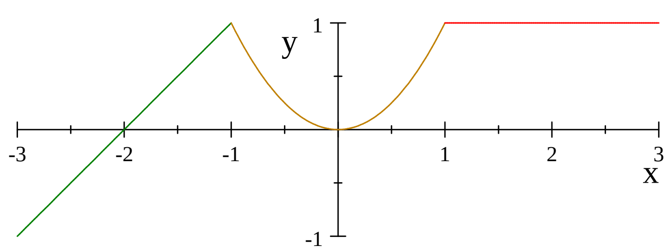
Ejemplo: Construir la gráfica de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & x \leq -1 \\ x^2 & -1 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

Solución: La diferencia de esta función respecto a las anteriores, radica en que el dominio se *particiona,* por lo cual la tabulación tambien se particionará.

x	$f(x)$
-3	-1
-2	0
-1	1
-0.5	0.25
0	0
0.5	0.25
1	1
2	1

gráficando lo anterior:



Es fundamental resaltar el hecho de que en ocasiones es muy díficil entender el comportamiento de una función, con su simple representación algebraica, para evitar esto tenemos el concepto de *gráfica de una función*, es decir con un "simple" dibujo podemos entender tal o cual tendencia de nuestro objeto de estudio.

Resuelva los ejercicios dedicados a esta sección antes de pasar al siguiente tema.

4 Módulo 4: Cálculo diferencial.

4.1 Definición de derivada.

Dada una función $f(x)$, se define su *derivada* en el punto x como:

$$f'(x) \equiv \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Estudiando a fondo el límite anterior, uno puede percatarse que el significado geométrico de la derivada es el de pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x, f(x))$. Haremos algunos ejemplos para ilustrar la idea.

Ejemplo 1: Calcular $f'(x)$ para la función $f(x) = 3x$.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{3(x+h)-3x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3x+3h-3x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3h}{h} = 3$$

□

No debe de extrañarnos para nada la solución a la que hemos llegado, debido a que la función $f(x) = 3x$ se representa gráficamente como una recta, la cual tiene por pendiente a $m = 3$. En general toda función de la forma:

$$f(x) = ax + b$$

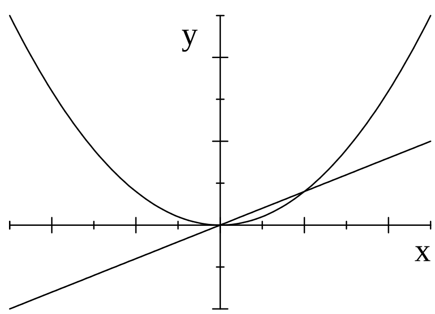
tiene por derivada a $f'(x) = a$.

Ejemplo 2: Calcular $f'(x)$ para la función $f(x) = x^2$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = 2x$$

$\square$

Nos detendremos un momento para aclarar una de las ideas fundamentales acerca de la derivada y el concepto que ésta encierra. En el ejemplo anterior obtuvimos que para $f(x) = x^2$, la derivada viene dada por $f'(x) = 2x$, lo cual significa que si deseamos obtener la pendiente de la recta tangente en un punto de la parábola (x_0, x_0^2), basta evaluar a la derivada en el punto x_0,es decir todo se reduce a encontrar el valor de $f'(x_0)$. Una idea que es común que el estudiante adopte es pensar que la recta $g(x) = 2x$ es la recta tangente a la gráfica de f, lo cual es un error.



Gráficas de $f(x) = x^2$ y $f'(x) = 2x$

Ejemplo 3: Calcular $f'(x)$ para la función $f(x) = \sqrt{x}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \left(\frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \right) = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{x+h}\right)^2 - \left(\sqrt{x}\right)^2}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h\,\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$\square$

Ejemplo 4: Calcular $f'(x)$ para la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{-h}{x\,(x+h)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

$\square$

Como podemos observar, el cálculo de la derivada mediante la definición es algo que se puede volver muy complicado. Para solucionar esto existen las denominadas *tablas de derivación,* las cuales tienen por objetivo principal el de aligerar en gran medida las operaciones necesarias para encontrar f'.

4.2 Tablas básicas de derivación.

A continuación expondremos una serie de reglas que permitirán el cálculo de la derivada de una forma mucho más sencilla que la que pudiese ofrecer la definición misma.

Un punto que es importante aclarar antes de continuar, es la notación que utilizaremos para la derivada desde este momento, la cual adopta la forma:

$$f'(x) = \frac{df}{dx}$$

Sean funciones $u(x) = u$, $v(x) = v$ derivables, entonces se cumple:

1.– $\dfrac{d(c)}{dx} = 0, \qquad c \in \mathbb{R}.$

2.– $\dfrac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}, \qquad n \in \mathbb{R}$

3.– $\dfrac{d(cu)}{dx} = c\dfrac{du}{dx}, \qquad c \in \mathbb{R}$

4.– $\dfrac{d\,(u \pm v)}{dx} = \dfrac{du}{dx} \pm \dfrac{dv}{dx}$

5.– $\dfrac{d(uv)}{dx} = v\dfrac{du}{dx} + u\dfrac{dv}{dx}$

$$6.- \quad \frac{d\left(\dfrac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}, \qquad v(x) \neq 0$$

$$7.- \quad \frac{d(u^n)}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx} \qquad \text{(regla de la cadena).}$$

De lo anterior, el estudiante debe entender que frases como "la derivada de un producto, es el producto de las derivadas" o "la derivada de un cociente, es el cociente de las derivadas" no son en lo absoluto correctas. Hagamos algunos ejemplos:

1) Encuentre la derivada para la función $f(x) = 5x^4 - 3x^2 + x - 9$

$$f'(x) = \frac{d\left(5x^4 - 3x^2 + x - 9\right)}{dx} = \frac{d(5x^4)}{dx} - \frac{d(3x^2)}{dx} + \frac{d(x)}{dx} - \frac{d(9)}{dx} =$$

$$= 5\frac{d(x^4)}{dx} - 3\frac{d(x^2)}{dx} + \frac{d(x)}{dx} - \frac{d(9)}{dx} = 5(4x^3) - 3(2x) + 1 =$$

$$= 20x^3 - 6x + 1$$

□

Pensemos por un segundo en lo que tendríamos que hacer si la derivada se tuviese que encontrar mediante la definición; con un rápido análisis vienen a nuestra mente expresiones como: $(x+h)^4, (x+h)^2$ y su desarrollo. Esto último no es nada rápido si no se cuentan con ciertas herramientas algebraicas.

En el ejercicio anterior, podríamos creer que realmente no ahorramos mucho tiempo al utilizar las tablas en vez de la definición, pero esto solo es una apariencia, debido a que el desarrollo que hicimos se basó a la necesidad de ilustrar el procediminento en general, es decir, ver como la derivada anula constantes, separa sumas y restas, etc. En la práctica, todos esos pasos se evitan, y el cálculo de una derivada de este tipo se reduce a multiplicaciones de potencias y coeficientes.

2) Encuentre la derivada para la función $f(x) = \left(2x^2 + 3x - 1\right)(7x - 9)$

Solución: Utilizando la tabla número 5, con $u = 2x^2 + 3x - 1$ y $v = 7x - 9$ se tiene lo siguiente:

$$f'(x) = (7x - 9)\frac{d(2x^2 + 3x - 1)}{dx} + (2x^2 + 3x - 1)\frac{d(7x - 9)}{dx}$$

$$= (7x - 9)(4x + 3) + (2x^2 + 3x - 1)(7)$$

$$= (28x^2 - 15x - 27) + (14x^2 + 21x - 7) = 42x^2 + 6x - 34$$

$\square$

3) Encuentre la derivada para la función $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+2}$, $x \neq 2$

Solución: Utilizando la tabla número 6, con $u = 2x - 3$ y $v = x + 2$ obtenemos:

$$f'(x) = \frac{(x+2)\dfrac{d(2x-3)}{dx} - (2x-3)\dfrac{d(x+2)}{dx}}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{(x+2)(2) - (2x-3)(1)}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{(2x+4) - 2x + 3}{(x+2)^2} = \frac{7}{(x+2)^2}$$

$\square$

4) Encuentre la derivada para la función $f(x) = (x^3 + 3x - 1)^7$.

Solución: Ahora la solución viene de la mano de la tabla número 7

$$f'(x) = 7(x^3 + 3x - 1)^6 \frac{d(x^3 + 3x - 1)}{dx} = 7(x^3 + 3x - 1)^6 (3x^2 + 3).$$

$\square$

5 Módulo 5: La Integral de Riemann

Históricamente, el concepto de integración era definido como el proceso inverso o contrario a el de derivada. Dicho de mejor manera, la integral de una función f se entendía como otra función F tal que $F' = f$. Leibniz en Alemania y Newton en Inglaterra trabajaron hace 400 años, aproximadamente, algunas ideas de antiderivadas y su relación con áreas debajo de la curva. Este concepto de integral ha ido evolucionando hasta convertirse en una de las herramientas fundamentales del cálculo moderno.

Para fines introductorios, empezaremos a estudiar el concepto de primitiva de una función, aclarando que dicho enfoque no muestra la verdadera fuerza de la integral.

Sea f una función definida en un intervalo (a, b) tal que existe F con derivada y con la propiedad

$$F\,' = f$$

entonces se dice que F es una **primitiva** de f.

1) Encuentre una primitiva para la función $f(x) = 4x$

Solución: Considere la función $F(x) = 2x^2 + 5$. Es fácil observar que su derivada es exactamente la función original

$$F\,' = \frac{d(2x^2+5)}{dx} = 4x = f$$

Con lo anterior se demuestra que F es en efecto, una primitiva de f.

2) Encuentre una primitiva para la función $f(x) = \sin(2x)$

Solución: Considere la función $F(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x) - 1$. Observe que su derivada es la función f, es decir:

$$F\,' = \frac{d(-\frac{1}{2}\cos(2x) - 1)}{dx} = \sin(2x) = f$$

Con lo anterior se demuestra que F es en efecto, una primitiva de f.

3) Encuentre una primitiva para la función $f(x) = x^3 + 6x - 1$

Solución: Considere la función $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + 3x^2 - x + 6$. Al igual que en los casos anteriores, se cumple:

$$F\,' = f$$

En otras palabras F es una primitiva de f.

Algo que es importante aclarar es que la constante que aparece al final de cada una de nuestras primitivas, en nada afecta el resultado final, puesto que es bien sabido que la derivada de una constante es cero. Esto último nos hace reflexionar en el hecho de que **la primitiva no es única** para una función dada.

La idea es construir ahora una herramienta capaz de otorgarnos una primitiva para una función dada. Dicha herramienta se conoce como integral de Riemann (primitiva), la cual donotaremos por

$$\int f(x)dx$$

5.1 Tablas de Integración básicas

A continuación mostramos algunas de la formulas más útiles para la integral

Sean f, g funciones y α, β números constantes arbitrarias

1) $\displaystyle\int dx = x + C$

2) $\displaystyle\int \alpha dx = \alpha x + C$

3) $\displaystyle\int \left[\alpha f(x) \pm \beta g(x)\right] dx = \alpha \int f(x)dx \pm \beta \int g(x)dx$

4) $\displaystyle\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq -1$

5) $\displaystyle\int x^{-1} dx = \ln|x| + C$

Observamos propiedades que aparecen en la derivada también, como la separación se sumas por citar un ejemplo.

Encuentre la integral para las siguientes funciones con ayuda de las tablas antes mencionadas

1.- $\displaystyle\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C$

$\square$

2.-
$$\begin{aligned}\int (3x^2 + 6x - 1)dx &= 3\int x^2 dx + 6\int x dx - \int dx \\ &= 3\left(\frac{x^3}{3}\right) + 6\left(\frac{x^2}{2}\right) - x + C = x^3 + 3x^2 - x + C\end{aligned}$$

$\square$

3.-
$$\begin{aligned}\int (x+1)^2 dx = \int (x^2 + 2x + 1)dx &= \int x^2 dx + 2\int x dx + \int dx \\ &= \frac{x^3}{3} + 2\left(\frac{x^2}{2}\right) + x + C = \frac{x^3}{3} + x^2 + x + C\end{aligned}$$

$\square$

4.-
$$\begin{aligned}\int \left(\sqrt{x} + 5x^{-2}\right) dx &= \int x^{\frac{1}{2}} dx + 5\int x^{-2} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 5\left(\frac{x^{-1}}{-1}\right) + C \\ &= \tfrac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - 5x^{-1} + C\end{aligned}$$

$\square$

5.- $\int \left(\frac{2}{5}x^{-3} + x + 12\right) dx = \frac{2}{5}\int x^{-3}dx + \int xdx + 12\int dx$

$$= \frac{2}{5}\left(\frac{x^{-2}}{-2}\right) + \frac{x^2}{2} + 12(x) + C$$

$$= -\frac{1}{5}x^{-2} + \frac{x^2}{2} + 12x + C$$

□

6 Ejercicios de módulos.

Ejercicios Módulo 1

Sección 1.1

a) $(-2x)^2$ b) $-(2x)^2$ c) $(xy)^3$

d) $x(xy)^5$ e) $(3x)^{-2}$ f) $\dfrac{1}{(5x)^{-3}}$

Sección 1.2

a) x^6x^{-2} b) $(7x^4)(-3x^2)$ c) $\frac{2^8}{2^3}$

d) $\dfrac{10^{-7}}{10^4}$ e) $2^{10}2^{12}$ f) $(-5x^2y^3)(3xy^{-2})$

g) $\dfrac{35y^8x^5}{-21y^{-1}x^9}$ h) $\dfrac{(7a^2b^3)^2}{a^3b^5}$ i) $(-3xy^5)^2(x^3y)^{-1}$

j) $(\dfrac{a^2b^3}{b^{-2}})^2$ k) $\dfrac{-xy^2z^3}{(xy^2z^3)^{-1}}$

Sección 1.3

a) $\sqrt[4]{9a^2}$ b) $\sqrt[3]{64a^6b^{12}}$ c) $\sqrt[3]{\sqrt[2]{128a^6}}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt[6]{512b^9}}$ e) $\sqrt{5ab^2}\sqrt{15ab^3}$ f) $\dfrac{\sqrt{24a^3b^4c^5}}{\sqrt{3ab^2c^2}}$

g) $\dfrac{\sqrt{21h^{-1}k^{-3}}}{\sqrt{10hk^2}}$ h) $\sqrt[4]{\dfrac{3}{5}}\sqrt[4]{\dfrac{125}{27}}$ i) $\dfrac{\sqrt{30x^3y^5}}{\sqrt{245xz^4}\sqrt{24yz^3}}$

Sección 1.4

a) $\dfrac{\sqrt{2\,(x+h)}-\sqrt{2x}}{h}$ b) $\dfrac{\sqrt{x+h+1}-\sqrt{x+1}}{h}$

c) $\dfrac{\sqrt{(x+h)^2+1}-\sqrt{x^2+1}}{h}$ d) $\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x+h}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{h}$

e) $\dfrac{1}{\sqrt{27}}$ f) $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ g) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$

h) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ i) $\dfrac{\sqrt{9}}{1+\sqrt{a}}$ j) $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

Sección 1.5

a) $\left(16h^{\frac{4}{3}}k^{-4}\right)^{\frac{1}{4}}$ b) $\left(4x^2y^6\right)^{\frac{1}{2}}$ c) $\left(\dfrac{32^{-2}x^{\frac{5}{6}}}{y^{-\frac{5}{4}}z^{10}}\right)^{\frac{1}{5}}$

d) $\dfrac{8^{\frac{2}{3}}a^{-\frac{4}{3}}}{b^{-\frac{1}{3}}}$ e) $\left(81a^{-4}b^{12}\right)^{\frac{1}{4}}$ f) $\left(\dfrac{4x^{-2}y}{9xy^{\frac{1}{2}}}\right)^{-\frac{1}{2}}$

g) $\left(\dfrac{27a^3y}{8a^{-1}y^{\frac{1}{2}}}\right)^{-\frac{1}{3}}$ h) $\left(6a^{-1}b^{\frac{2}{3}}\right)\left(ab^{\frac{1}{3}}\right)$ i) $\left(27x^{-6}y^{\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{1}{3}}$

Ejercicios Módulo 2

Sección 2.1

I.- Transforme a radianes los siguientes ángulos.

a) 26° b) 54.3° c) 123.8° d) 275°

e) 32° f) 360° g) 184.6° h) 135°

II.- Transforme a grados los siguientes ángulos dados en radianes.

a) $\dfrac{3}{4}\pi$ b) 4π c) $\dfrac{5}{7}\pi$ d) $\dfrac{3}{2}\pi$

e) $\dfrac{2}{3}\pi$ f) π g) 1.88 h) 7.65

Sección 2.2

I.- Dado el triángulo rectángulo, encontrar todas las funciones trigonométricas asociadas a él.

a) $a = 2$, $b = 6$ b) $a = 3.5$, $b = 5.4$ c) $a = 7$, $c = 7.7$

d) $a = 5$, $c = 9.5$ e) $a = 3$, $c = 6$ f) $b = 1$, $c = 1.73$

II.- Para los triángulos del ejercicio anterior, encontrar los ángulos internos.

Sección 2.3

I. Encuentre los datos para los siguientes triángulos, mediante ley de los senos.

a) $\alpha = 41°$, $\gamma = 77°$, $A = 10.5$

b) $\alpha = 20°$, $\gamma = 31°$, $B = 210$

c) $\gamma = 81°$, $C = 11$, $B = 12$

d) $\gamma = 47.74$ $A = 131.08$ $C = 97.84$

II.- Encuentre los datos para los siguientes triángulos, mediante ley de los cosenos.

a) $\alpha = 60°$, $B = 20$, $C = 30$

b) $\gamma = 45°$, $B = 10$, $A = 15$

c) $A = 2$, $B = 3$, $C = 4$

d) $A = 10$, $B = 15$, $C = 12$

Ejercicios Módulo 3

Sección 3.1

I. Un cine tiene una tarifa de $25 por persona y la capacidad máxima es de 1500 personas. Defina una función que describa el comportamiento de la ganancia. Mencione el dominio y el rango para tal función.

II.- Dado el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 6\}$ defina tres funciones de dicho conjunto en si mismo.

III.- Dé un ejemplo práctico de la vida cotidiana donde se involucre el concepto de función. Explique.

IV.- Cuántos elementos debe tener un conjunto para poder ser dominio de una función?.

Sección 3.2

1. $f(x) = x^3 + 4x - 1 \qquad f(1),\ f(-2),\ f(\pi)$

2. $f(x) = \dfrac{x}{2 - x^2} \qquad f(3),\ f(0),\ f(\sqrt{2})$

3. $f(x) = \sqrt{x^3 + 1} \qquad f(2),\ f(e),\ f(c)$

4. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x + 2x^4} \qquad f(2),\ f(\theta),\ f(-1)$

5. $f(x) = \dfrac{1}{x} + 3\sqrt{x} - x^2 \qquad f(0),\ f(5),\ f(x+h)$

Sección 3.3

1. $f(x) = x - 3$ **2**. $f(x) = 6 - x^2$ **3**. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x} + 1}$

4. $f(x) = x^3 + 4x$ **5**. $f(x) = \sqrt{x} - x$ **6**. $f(x) = \left(\dfrac{2}{x+3}\right)^2$

7. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 7}}{x}$ **8**. $f(x) = (x - 1)^4$ **9**. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

Ejercicios Módulo 4

Sección 4.1.

Encuentre la derivada de las siguientes mediante la definición.

1. $f(x) = 2x^2 + 5x - 4$ **2**. $f(x) = 5x + 3$

3. $f(x) = \sqrt{x + 3}$ **4**. $f(x) = \dfrac{8}{x+1}$

5. $f(x) = x^3 + 2$

6. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

7. $f(x) = x + \sqrt{x}$

8. $f(x) = x - x^2$

9. $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt{x^2 + x - 1}}$

10. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

Sección 4.2

I.- Calcule la derivada de las siguientes funciones mediante tablas.

1. $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 4x + 3$

2. $f(x) = 6x^7 + 3x^5 + 2x^4 + \pi x^{-1} + 14$

3. $f(x) = (x^2 + 1)(3x - 5)$

4. $f(x) = (6x^{-4} + 7x)(\sqrt{x} + 3)$

5. $f(x) = \dfrac{5x^2 + 3x + 1}{x^2 + 11}$

6. $f(x) = \dfrac{x\left(x^3 + 2x\right)}{2x + 4}$

7. $f(x) = \sqrt{x^3 + 2x^2 + 4}$

8. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x + 3}}$

9. $f(x) = \dfrac{\left(6 - x^4\right)^9}{x}$

10. $f(x) = (7x^{-4} + 3x)(x + 2)^{-2}$

11. $f(x) = x^3\sqrt{x + 1}$

12. $f(x) = \left(\dfrac{2x - 4}{3x + 5}\right)^3$

II.- Encuentre la ecuación de la recta tangente a la función en el punto indicado.

13. $f(x) = x^3 + 2x^2 + 4, \qquad x = 1$

14. $f(x) = \sqrt{x}, \qquad x = 4$

Ejercicios Módulo 5

Sección 5.2

Calcule la integral correspondiente

1. $\int x^5 dx$

2. $\int (4x+1)^2 dx$

3. $\int (x+2)(x-3) dx$

4. $\int \sqrt[5]{x^3} dx$

5. $\int (3\sqrt{x} + x - \frac{4}{x}) dx$

6. $\int \frac{x^2-1}{x+1} dx$

7. $\int (2x+5)^3 dx$

8. $\int \frac{x^{-1} - x^{-2} + 3}{x} dx$

9. $\int x^6 (5x+1) dx$

10. $\int (7\sqrt[3]{x} - x) dx$